(ＪＡＰＬＡ 2011 10/22)

一挙挽回策の勝負手のゲーム

統計数理研究所(名誉教授)　鈴木義一郎

あるギャンブラーが勝率ｐで、勝負をｎ回続けて行うとする。ｉ回目の勝負でのギャンブラーの利得を X_i、ｉ回目までの所持金を S_i とする。

そこで

$$S_{i-1} = X_1 + X_2 \cdots\cdots\cdots + X_{i-1}$$

が負にならない限りは

$$X_i = \begin{cases} +1 \ (with\ probability\ p) \\ -1\ (with\ probability\ q = 1 - p) \end{cases}$$

のように１単位金だけを賭ける。しかし S_{i-1} が負になったら

$$X_i = \begin{cases} -S_{i-1} \ (with\ probability\ p) \\ S_{i-1}\ (with\ probability\ q) \end{cases}$$

のように賭けて、所持金が一挙に０になるようにする。これを「一挙挽回策の勝負手のゲーム」と呼ぶことにする。

さらに、長さ（２ｈ＋１）の確率ベクトルを次のように定義する。

$$P[h]^t = [P_h(h), P_h(h-1), \cdots\cdots, P_h(1), P_h(0), P_h(-1), \cdots\cdots, P_h(-2^{h-1})]$$

さらに、次のような（２ｈ＋３、２ｈ＋１）の行列を定義する。

$$A[h] = \begin{array}{c} \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} P[h+1] & O_1[0] \\ O_2[0] & O[p,0] \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ \\ (2h+3) \end{array} \end{array} \\ (h+1) \end{array} \qquad B[h] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ q\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots 0\ q \end{bmatrix} \\ (2h+1) \end{array}$$

ここで、

$$P[h+1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} p\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0\ p\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots p \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ \\ (h+1) \end{array} \end{array} \\ (h+1) \end{array} \qquad O[0] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0 \cdots\cdots\cdots 0 \end{bmatrix} \\ (h) \end{array}$$

$$O[0]=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0\,0\cdots\cdots\cdots 0\\ 0\,0\cdots\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ 0\,0\cdots\cdots\cdots 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l}(h+2)\\ (h+3)\\ \\ (2h+3)\end{array}\\ (h+1) & \end{array}
\qquad
O[p,0]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}p\;p\cdots\cdots\cdots p\\ 0\,0\cdots\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ 0\,0\cdots\cdots\cdots 0\end{bmatrix}\\ (h)\end{array}$$

ゲームの定義から

$$P[h+1]=\{A[h]+B[h]\}P[h]$$

といった漸化関係の成立することが確かめられる。

On a stocastic game with one-chance recover (AISM 1980)

Ah=:4 :0 r=.(x*=/~i.a),.((a=.y+1),y)$0 r,((k$0),y$x),(a,a+y)$0) Bh=:4 :'((2,b)$0),(1-x)*=/~i.b=.1++:y' Ch=:Ah*Bh Ph=:3 :'y,0,-.y'	]A=:0.6 Ah 1 0.6 0 0 0 0.6 0 0 0 0.6 0 0 0 0 0 0	]B=:0.6 Bh 1 0 0 0 0 0 0 0.4 0 0 0 0.4 0 0 0 0.4

]P1=:Ph 0.6 0.6 0 0.4]P2=:C1 +/ .*P1 0.36 0 0.48 0 0.16]P=:(0.4 Ch 1)+/ .*(Ph 0.4) 0.16 0 0.48 0 0.36	]C2=:0.6 Ch 2 0.6 0 0 0 0 0 0.6 0 0 0 0.4 0 0.6 0 0 0 0.4 0 0.6 0.6 0 0 0.4 0 0 0 0 0 0.4 0 0 0 0 0 0.4	]P3=:C2 +/ .*P2 0.216 0 0.432 0.096 0.192 0 0.064 (0.4 Ch 2)+/ .*P 0.064 0 0.288 0.144 0.288 0 0.216

prob=:4 :0 r=.<p=.Ph x [k=.0 while.k<y-1 do.r=.r,<p=.(x Ch k=.k+1)+/ .*p end.)	>0.6 prob 3 0.6 0 0.4 0 0 0 0 0.36 0 0.48 0 0.16 0 0 0.216 0 0.432 0.096 0.192 0 0.064 >0.4 prob 3 0.4 0 0.6 0 0 0 0 0.16 0 0.48 0 0.36 0 0 0.064 0 0.288 0.144 0.288 0 0.216