２００６年８月５日～８月７日

ブラック・ショールズのオプション価格の式について
The Black-Scholes Option Pricing Model

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

1. はじめに

何年か前に経済学でノーベル賞をとった研究があると聞いてはいたが、ブラック・ショールズの式がこんなにも難解なものであるとは思わなかった。しかし、竹内研究室の修士の学生さんや、枇々木研究室の学生さんらは良く理解しているようで、これは頑張らなくてはと思った次第である。以下は早急に理解すべく、森真・藤田岳彦共著の「確率・統計（数理ファイナンスへの適用）」のなかから、数理ファイナンスの部を参考に、分ったことを簡略して述べたものである。

2. リスク中立確率と１期間２項モデル

ある投資対象（一般に株・投資信託などの金融商品をいい、今後、代表として株という言葉を使うことにする）の時間 $t=0$ での価格を S、1 期経過後に大きく上昇した場合の利率を u、それほど上昇しなかった場合の利率を d、また大きく上昇する確率を p、そうでない場合の確率を $1-p$ とすると、1 期後の価格は次のようになる。

$$S = \begin{cases} (1+u)S & : \quad p \\ (1+d)S & : \quad (1-p) \end{cases}$$

一方、安定した利率 r の債券等（銀行預金・国債・社債など金利が安定している債券などで、今後代表として債券と言う名を使うことにする）があるとして、その価格を B とすると、1 期後の価格は $B(1+r)$ となる。ここで $d \le r \le u$ でなければならない。何故なら、r が d より小さければ株を買い債券を買わないであろうし、r が u より大きければ株ではなく債券の方を買うことになる。このような状態を「裁定が存在する」といい、投資にあたって考慮する状態になく、”どちらかを買う行動”が有利であることが自明で、リスク無しで利益を上げることができる。従って裁定が存在しない「無裁定である」ためには、この不等式が成り立たねばならないことになる。

またこの利率に関して次の関係が成り立つ。ある株の価格を S としたとき、1 期後の価格の期待値 $E\{S(1)\}$ は S を安全利率で投資したときの $S(1+r)$ に一致しなければならない。

$$(1+u)p + (1+d)(1-p) = 1+r$$

この式を解くと、

$$p = \frac{r-d}{u-d}、\qquad q = 1-p = \frac{u-r}{u-d}$$

この確率をリスク中立確率といい、これが満たされなければ先に述べたように、株か債券か投資する先が明らかにどちらかに片寄ってしまい「裁定が存在する」ことになる。

さてここで、株価 S に対するコールオプション価格 C を考える。コールオプションは「S が満期時（1 期後）に K 以上ならばオプションを行使して、それを売って”売価”-K の利益を得、K 以下であればオプションを行使せず利益はゼロとなる」行動である。例えば価格が上昇したとすると、$(1+u)S$ が K 以上ならばオプションを行使し、$(1+u)S-K$ の利益を得、K 以下ならば何もしないので利益は 0 となる。これを $Max\{(1+u)S-K, 0\}$ で表す。従ってオプション価格 C は、損をすることが無いので必ず非負の価格になる。

このオプションに対し、S と B のそれぞれを C_1、C_2 単位購入するポートフォリオを考え、それが 1 期後（満期時）に株価の上昇・下降に影響されず、オプション価格に一致するように C_1、C_2 を決めることにする。

$$\begin{cases} C_1(1+u)S + C_2(1+r)B = Max\{(1+u)S-K,0\} & : \quad 上昇したとき \\ C_1(1+d)S + C_2(1+r)B = Max\{(1+d)S-K,0\} & : \quad 上昇しなかったとき \end{cases}$$

なる連立方程式を解けばよい。上の方程式を解くと、

$$C_1 = \frac{Max(\{(1+u)S-K,0\} - Max\{(1+d)S-K,0\}}{(u-d)S}$$

$$C_2 = \frac{(1+u)Max(\{(1+d)S-K,0\} - (1-d)Max\{(1+u)S-K,0\}}{(1+r)(u-d)B}$$

C_1、C_2 で決められたポートフォリオの価格とオプションの価格 C は、1 期後では一致しているが、現時点 $(t=0)$ でも一致していなければならない。何故なら $C > C_1S + C_2B$ であれば、現時点でポートフォリオを買い、同時にコールオプションを売っておき、満期時に清算すると必ず $C - (C_1S + C_2B) > 0$ の利益を無リスクで得る。これは無低裁定の原理に反する。逆に $C < C_1S + C_2B$ についても同様の議論が成り立つ。したがって現時点でのコールオプションの価格はポートフォリオの価格にも一致し、次のように決められる。

$$\begin{aligned} C &= C_1S + C_2B \\ &= \frac{Max\{(1+u)S-K,0\} - Max\{(1+d)S-K,0\}}{u-d} \\ &\quad + \frac{(1+u)Max\{(1+d)S-K,0\} - (1+d)Max\{(1+u)S-K,0\}}{(1+r)(u-d)} \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-d}{u-d}Max\{(1+u)S-K,0\} + \frac{u-r}{u-d}Max\{(1+d)S-K,0\}\right) \end{aligned}$$

ここで次のような確率変数 X_1 を導入することにより、

$$\begin{aligned} Pr\{X_1 = 1+u\} &= \frac{r-d}{u-d} \\ Pr\{X_1 = 1+d\} &= \frac{u-r}{u-d} \end{aligned}$$

を使って、

$$C = \frac{1}{1+r}E[Max\{X_1S-K,0\}] \qquad ここで、X_1S は 1 期後の株価$$

のように書くことが出来る。

X_1 は 1 期後の価格上昇または下落が、それぞれリスク中立確率で生ずることを示している。この確率は安全利子率 r によって決められていることに注意をしよう。

このとき、$\dfrac{1}{1+r}$ は 1 期後の価格を 0 時点での価格に割り引く作用をしている。また、

$$E[X_1] = (1+u)\frac{r-d}{u-d} + (1+d)\frac{u-r}{u-d} = 1+r$$

となっている。

3. n 期間、2 項モデル

先の例では 1 期間であったが、ここで n 期間での 2 項モデルを考える。n 個の独立な確率変数 X_1、X_2、$\ldots$、X_n は、

$$\begin{cases} Pr\{X_i = 1+u\} = p & 上昇変動のとき \\ Pr\{X_i = 1+d\} = 1-p & 上昇変動でないとき \end{cases}$$

とすると、前節の議論から、n 回の価格変動が生じて、n 期後の時間を T と書くと、

$$S_T = X_nX_{n-1}X_{n-2}\cdots X_1S$$

となっているから、コールオプションの価格は、

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(1+r)^n}E[Max\{S_T-K,0\}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^n}E[Max\{X_nX_{n-1}\cdots X_1S-K,0\}] \\
&= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n}Max\{(1+u)^k(1+d)^{n-k}S-K,0\}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{(1+u)^k(1+d)^{n-k}>K/S}\{(1+u)^k(1+d)^{n-k}S-K\}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \\
&= S\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1+u}{1+r}p\right)^k\left(\frac{1+d}{1+r}(1-p)\right)^{n-k}-\frac{K}{(1+r)^n}\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

ここで、k_0 は $(1+u)^k(1+d)^{n-k}\geq K/S$ を満たす最大の整数を表す。また第 1 項の $Sigma$ は、パラメータを $p_0=\dfrac{1+u}{1+r}p$ としたときの 2 項分布の部分和、第 2 項の Σ はパラメータ $p_0=p$ の 2 項分布の部分和である。

4. ブラック・ショールズのコールオプション価格

いよいよ本題に入る。n 期間 2 項モデルにおいて、時間の幅を小さくし、$n\to\infty$ のときの極限をとり、中心極限定理によりオプション価格を求めてみる。今、時間間隔 T を分割して $T=n\Delta t$ とする。
さて、前節において $S_nC_k\left(\dfrac{1+u}{1+r}p\right)^k\left(\dfrac{1+d}{1+r}(1-p)\right)^{n-k}$ は 2 項ランダムウォークで n 期経過した後、価格が n 回上下したうちの k 回上昇した場合の価格を表している。このとき上昇する確率は $p_0=\dfrac{1+u}{1+r}p$ である。つまり n 期間に於ける上昇の回数の分布は正規分布 $N(np_0,np_0(1-p_0))$ で近似できることになる。つまり、np_0 を中心にその振れの幅は $\pm\sqrt{np_0(1-p_0)}$ ということになる。時間に直すと n 期間後、すなわち T 時間の経過後であるからそのときで考えると、Tp_0 を中心に $\pm\sqrt{Tp_0(1-p_0)}$ の振れ幅と考えられる。ここで $T=n\Delta t$ を代入し、$np_0=\mu$、$np_0(1-p_0)=\sigma^2$ とおくと、

$$u=\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}$$

同様に、

$$d=\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}$$

と書くことが出来る。ここで、次のような確率変数 X_1、X_2、$\cdots$、X_n を考える。

$$Pr\{X_i=1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\}=p$$
$$Pr\{X_i=1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\}=1-p$$

時間幅 Δt の安全利子率を $r\Delta t$ とすると、リスク中立確率は、

$$p=\frac{r\Delta t-d}{u-d}=\frac{r\Delta t-(\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}=\frac{1}{2}+\frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$
$$1-p=\frac{1}{2}-\frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$

今、T 時間経過後の価格 S_T を計算してみよう。
$S_T=X_nX_{n-1}\cdots X_1S$ であるが、$lnS_T=lnX_1+lnX_2+\cdots+lnX_n+lnS$ で考える。

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^kx^k+\cdots$　両辺を積分して、

$ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}x^k+\cdots$ という式を利用して、

ξ_1、ξ_2、$\cdots$、ξ_n を $Pr\{\xi_i=1\}=p$、$Pr\{\xi_i=-1\}=1-p$ なる独立な確率変数を用いて lnX_i を展開す

ると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
lnX_i &= ln(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_i) \\
&\simeq (\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_i)-\frac{1}{2}(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_i)^2 \\
&\simeq \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_i \\
&= \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\left(\xi_i-\frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)
\end{aligned}
$$

従って、

$$
lnX_1+lnX_2+\cdots+lnX_n=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)n\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\right)
$$

ここで　$\xi_i'=\xi_i-\dfrac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ である。
また、

$$
\begin{aligned}
E(\xi_i) &= 1\times p+(-1)\times(1-p) \\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)+(-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{r-\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) \\
&= \frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t} \\
E(\xi_i^2) &= 1\times p+(-1)^2\times(1-p)=1 \\
E(\xi_i') &= 0 \\
V(\xi_i') &= E(\xi_i^2)-\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)^2=1-\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\Delta t
\end{aligned}
$$

これらの性質と ξ_i の独立性から、

$V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\right)=n\left\{1-\left(\dfrac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\Delta t\right\}$　となりこれを用いて

$$
lnX_1+lnX_2+\cdots+lnX_n=(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\sqrt{\left\{1-\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\Delta t\right\}}\times\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i'}{\sqrt{n\left\{1-\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\Delta t\right\}}}
$$

が成り立つことがいえる。中心極限定理を使うと、lnS_T の分布は平均 $lnS+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)T$、分散 σ^2T の正規分布に収束することが分る。

また、　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+r\Delta t)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{rT}{n}\right)^n=e^{rT}$ が連続型の割引係数となる。

以上のことがらをあわせてコールオプションの価格を求めると、

$$
\begin{aligned}
C &= e^{-rT}E[Max\{S_T-K,0\}] \\
&= e^{-rT}E\left[Max\{Sexp[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma N(0,T)]-K,0\}\right] \\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}Max\{Sexp[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}y]-K,0\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&= e^{-rT}\int_{Sexp[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}y]>K}^{\infty}\{Sexp[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}y]-K\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&= e^{-rT}\int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty}\{Sexp[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}y]-K\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&= I_1+I_2\quad \text{に分けて考える。ただし}\ I_2=Ke^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-y^2/2}dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= e^{-rT} S \int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}y\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&= e^{-rT}\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T-\frac{1}{2}\{y^2-2\sigma\sqrt{T}y\}\right]dy \\
&= e^{-rT}\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T-\frac{1}{2}\{(y-\sigma\sqrt{T})^2-\sigma^2T\}\right]dy \\
&= e^{-rT}\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\left\{rT-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T})^2\right\}dy \\
&= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{ln(K/S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T})^2\right\}dy \\
&\quad \text{ここで } z=y-\sigma\sqrt{T} \text{ で変換すると、} \\
&= \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\int_{\{-ln(S/K)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}dz \\
&\quad \text{積分範囲を負にして入れ替え、標準正規分布の累積分布関数を } \Phi(z) \text{ で表すと、} \\
&= S\int_{-\infty}^{\{ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = S\Phi(d_1) \\
&\quad \text{ここで、}\quad d_1=\frac{ln\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

一方、I_2 は、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= Ke^{-rT}\int_{\{-ln(S/K)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&\quad \text{積分範囲を負にして入れ替えて} \\
&= Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{\{ln(S/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\}/(\sigma\sqrt{T})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\
&\quad \text{ここで、}\quad d_2=\frac{ln\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T} \quad \text{とすると、} \\
&= Ke^{-rT}\Phi(d_2)
\end{aligned}
$$

以上を纏めるとブラック・ショールズのコールオプションの式は、

$$
\begin{aligned}
C &= I_1-I_2=S\Phi(d_1)-Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\
&= S\Phi\left(\frac{ln\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{ln\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
$$

S:株価
T:満期までの時間
r:安全利子率
σ:ボラティリティ、株価の標準偏差

なお比較のため、n 期間 2 項モデルの式を並べて再掲しておく。

$$
C = S\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1+u}{1+r}p\right)^k\left(\frac{1+d}{1+r}(1-p)\right)^{n-k}-\frac{K}{(1+r)^n}\sum_{k=k_0}^{n}{}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}
$$

ここで、k_0 は $(1+u)^k(1+d)^{n-k}\geq K/S$ を満たす最大の整数を表す。