数のいろいろ　No.1　完全数
Numbers　Series No.1　Perfect Numbers

(株)竹内ハガネ商行　システム室長　竹内寿一郎

1.　はじめに

JAPLA 研究会でたびたび「いろいろな数の研究」が行われ報告されてきた。2005 年 3 月まで遡って研究会で発表されたテーマを参考として末尾の補遺に掲げておいたが、漏れがあったらご指摘いただきたい。近いところでは森澤さんの遺稿となった、$x^2+y^2=z^2$を満たす整数の組であるピタゴラス数の研究、これには西川先生も精力的に議論に参加されていた。幸運数については今は懐かしい中村先生が何回も繰り返し発表し、鈴木先生がフォローし、中野先生も素数階乗の観点から話題にしていた。本稿で取り上げた「完全数」に関連する友愛数については山下さん、中野先生をはじめとして、西川先生等の発表があり、その他ベルギー数、エジプト数、ノブナンバー、カプレカ数、そしてフィボナッチ数、メルセンヌ数などに関するいくつかの興味ある発表がなされてきた。

今年の 1 月から体調が悪くなり、週 3 回の人工透析をせざるを得なくなり、毎月の JAPLA 研究会にも出席できなくなってしまった。こんな病院通いに慣れてきたこの頃になって、ようやく透析中に何とか書物に慣れ親しむようになり、何となく手始めにフィボナッチ数のお話を読んでみた。そこからこの数のいろいろな親戚がポロポロポロポロ出てきたのである。まず、初期値が異なるリュカ数、和の取り方の異なるペル数、それらの発展系のペル・リュカ数、これらの系列はこの数のひとつ前との比の極限が一定となり、フィボナッチ数やリュカ数では黄金比に、ペル、ペル・リュカ数の極限は白銀比となる。これらの比は第 1 貴金属比、第 2 貴金属比とも呼ばれ、第 3、第 4 の貴金属比も存在するようで、ちなみに第 3 貴金比には青銅比という名がついている。ところで、ペル数を利用すると、平方三角数を計算することができる。つまり、三角数でもあり、平方数である数を生成することができるのである。平方数とは n の 2 乗と書ける数で、三角数とは 1、3、6、10、…、のようにコインを配置すると三角形に並べることができる数である。ちなみにメルセンヌ数は三角数でもある。と、いうことから平方数は四角数とよばれることもある。このメルセンヌ数は完全数と深い深い関係がある数である。

2.　数学で使われる数

まず、基本的な数といえば自然数である。1 から始まるのはいうまでもない。そして負の数および、ゼロの発見以降これらの数を含めて整数とよばれるようになる。さて整数と整数の間にはどんな数があるであろうか。そこで分数や小数が登場する。小数の小数点以下の数字がいくつあれば整数間の隙間が埋められるであろうか。これらの小数はすべて整数の比、しすわち分数で表すことが出来、しかも数直線上を隙間なくびっちり埋めることが出来る。これらの数を有理数という。つまり、有理数と有理数の間には必ず有理数がある。だから数はべったり埋まっているのである。ところがそこに無理数というのが登場する。例えば$\sqrt{2}$に相当する数があって、それに一番近い有理数を見つけられず、実は最も近い有理数は無いのである。どんな有理数をもってしても$\sqrt{2}$にぴったりする数は無いのである。どんなに有理数と有理数が近くてもそれを分離する数が存在する、この事実を述べ

たのが有名なデデキント(Dedekind)の切断という概念で、有理数の稠密度よりもっと稠密な無理数があり、これが有理数の隙間を埋めているのである。ところで無理数というのは有理数に対して付けられた名前で、√￣2 のような無理数は、有理数を係数にした代数方程式の解として得られるもので、これらの無理数の総数は数学でいう可附番無限個の範疇にはいるものである。一方、$\pi=$ 3.1415926535…や e=2.7178…などの特殊な数は可附番無限個の範疇に入らず、超越数と名付けられている。実はこれらの超越数は無理数よりずっと多く、ただ我々はそれを知らないだけなのである。この稠密さを数学では連続体の濃度といっている。つまり数直線上に、数字は有理数でびっちり詰まっているものの、有理数の隙間に数多くの無理数が存在しており、それでもその無理数の隙間に我々の知らない超越数が所狭しと？数多く存在しているのである。かように数というものはいろいろ種類があるということである。

3.　完全数(Perfect Number)

ところで、素数とは約数として 1 とその数以外に持たないという数で、約数は因数とも呼ばれる。したがって約数として素数のみで表現することを、素因数分解という。J では素因数分解の関数 q: を持っていて、q:24⇔2 2 2 3　で求めることができる。この約数から 24 の全ての約数を求めると、 24 の全ての約数は⇔1 2 3 4 6 8 12 24　となる。このうち、24 を除いた約数の和は +/1 2 3 4 6 8 12⇔36 であるから、これは 24 より大きくなり 24 は過剰数(Abundant Number)といわれる。自分自身を除く全ての約数の和がその数に等しいとき、その数を完全数という。そしてその数より小さいときは不足数(Deficient Number)といわれる。

完全数には古来から 6、28 が知られており、これは神がこの世を 6 日間で創造したからだということ、また月の公転周期が 28 であるからだという伝説がある。この他に 496、8128、3350336、8589869056、137438691328 までが、オイラー(Euler)が登場するまで求められていた完全数で、その後、オイラー以降次々に発見され、分散コンピューティングのプロジクト(GIMPS)で国際分業により 2009 年 11 月現在で 47 個の完全数が発見されている。

4.　全ての約数(因数)の求め方

自己流による方法

完全数の確認には全ての約数を求める必要がある。J の関数 q:を用いると

q:220　　2 2 5 11

である。約数はこの 4 個の素数からそれぞれ 0 個、1 個、2 個、3 個、4 個を取る組み合わせの数をかけたもの全てで、

1、2 2 5 11、2 2　2 5　2 11　2 5　2 11　5 11、2 2 5　2 2 11　2 5 11　2 5 11、2 2 5 11

0 個は 1 として、1 個が 4、2 個が 6、3 個が 4、4 個が 1 あり、全部で 16 通りの組み合わせがあり、その掛け算は 1 2 2 5 11 4 10 22 10 22 55 20 44 110 220 であり、これを大きさの順に並べ重複しないように求めると

1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220

のように計算できる。

これは q:の結果に対し出てきたリスト(ベクトル)a の個数に対し、2 進数展開をすると、

　　　#:i.2^#a=.q:a
により全ての 0 個から 4 個までの組み合わせを示す 0 と 1 から成る系列が得られるので、それらの積をとり、並べ替え(／:)、重複をカット(~.)して結果を得る。
その関数は以下の通りである。

```
   FactZation=: 3 : 0
~.b/:b=.>*/L:0(<"1#:i.2^(#a))#L:0<a=.q:y
)
   FactZation 220
1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220
```

以上の方法にはかなりの無駄がある。

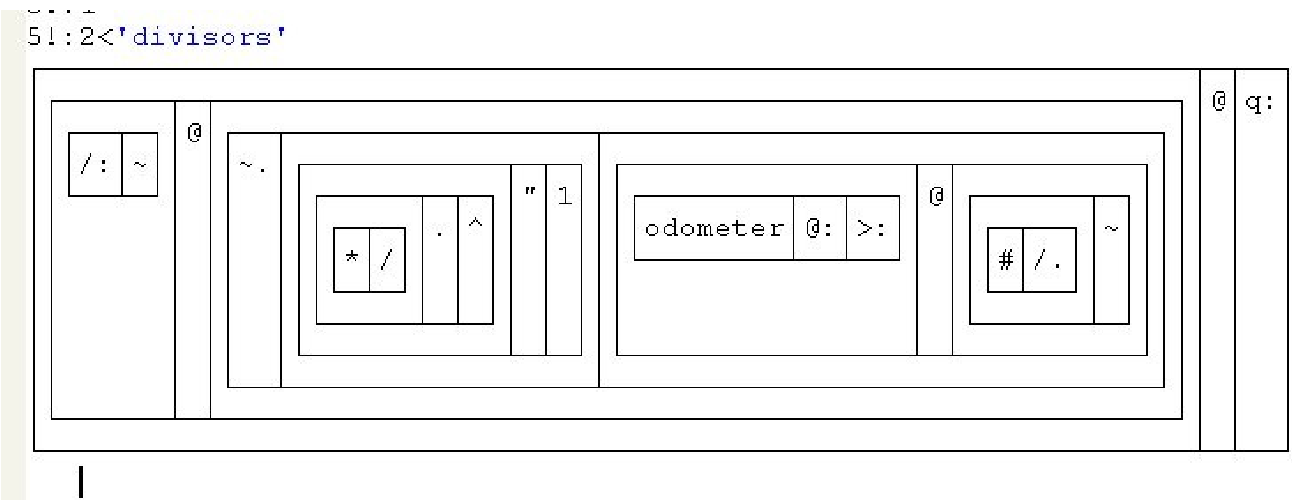
J フレーズで紹介されている方法

　2009 年の 2 月に西川先生が J のフレーズから気の利いたやり方を解説している。
約数(divisors)の関数は tacit で書かれていて

```
    divisors=: /:~@(~. */ .^"1  odometer@:>:@(#/.~))@q:
    odometer=: #: i.@(*/)
    amicable=: +/@:}:@divisors
```

これはその数を除く約数の合計を求める関数

何とも非常に読みにくいコーディングになっている。amicable(親愛数)は約数から友愛数を求めるための関数になっているのでそういう名前にしている。



この関数のキーポイントは q:からの結果を 2 進数ではなく、重複している数に対して mn 進数の展開をしているところにある。
　a=.q:220 から a=.2 2 5 11 であるとして odometer@:>:@(#/.~)　の最後の(#/.~)を考える。
　　　　2 2 5 11 #/.~ 2 2 5 11
　2 1 1
という結果を得る。／.の両側形はキーという機能で、／.の左引数の同じ文字に対応する右引数の対応する文字に対して／.のすぐ左の動詞を作用させるもので、左の引数 2 2 5 11 は最初と次が 2、そして 5 と 11 の 3 メンバーでそれに対する右のメンバーは同じく 2 2 5 11 で対応するのは同

じ数字であり、動詞はデータの個数であるから、2 にたいしては 2 個であるから 2、5 と 11 は 1 個であるから結果は２１１となる。それに１を加えて(＞:)odometer という関数が働く。

```
  (~. */ .^"1  odometer@:>:@(#/.~)
```

はフォークになっていて、odometer@:>:@(#/.~)が右動詞、~.が左動詞、真ん中の動詞が*/ . ^"1 という外積で　(~.2 2 5 11) */ . ^"1 odometer@:>:@(#/.~) ２２5 11 で右は

```
  odometer@:>:@(#/.~)2 2 5 11
0 0 0
0 0 1
0 1 0
0 1 1
1 0 0
1 0 1
1 1 0
1 1 1
2 0 0
2 0 1
2 1 0
2 1 1
```

つまり odometer=.#: i.@(*/) はフックで、

```
  (#: i.@(*/))3 2 2
0 0 0
0 0 1
0 1 0
0 1 1
1 0 0
1 0 1
1 1 0
1 1 1
2 0 0
2 0 1
2 1 0
2 1 1
  3 2 2 #: i.12  NB. 0~11を３進２進２進数で表す
0 0 0
0 0 1
0 1 0
0 1 1
1 0 0
```

1 0 1
1 1 0
1 1 1
2 0 0
2 0 1
2 1 0
2 1 1
そこで、フォークを完成させて、

```
   2 5 11 */ .^"1 (3 2 2#:i.12)
1 11 5 55 2 22 10 110 4 44 20 220
```

これを昇順にソートして

```
  /:~1 11 5 55 2 22 10 110 4 44 20 220
1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220
```

という訳でめでたく完成した。
前に述べた 2 進数による展開では同じ数の素因数が多いとき、無駄な計算が多くなり、特に今後メルセンヌ数などのとき、2^{31} や 2^{127} のような因数が含まれるとき、全く無駄な計算スペースが必要となるので、なるべくべき乗を利用して迅速に計算出来るように工夫するべきである。

5.　偶数の完全数

　現在 47 個の完全数が発見されている。その数を除く約数の合計がその数になる完全数はこれまでの例では末尾が 6 または 8 になっている。また全て偶数である。実はこのことはまだ良く分かっていないことで、奇数の完全数についてもよく分かっていない。ただ、偶数の完全数についてはオイラーが研究していて、偶数の完全数はメルセンヌ数 2^n-1 が素数のとき、$2^{n-1}(2^n-1)$が完全数であることが証明されている。さらに偶数の完全数を探すということは、メルセンヌ素数を探すことと同等であることが証明されているのである。

【定理】メルセンヌ数 $M_n=2^n-1$ が素数であるとすると、$2^{n-1}M_n$ は完全数である。
$2^{n-1}M_n$ の約数は $1,2,4,\cdots,2^{n-2},2^{n-1},M_n,2M, 4M_n,\cdots, 2^{n-2}M_n, 2^{n-1}M_n$ である。自身を除く約数の合計は

$$\Sigma^{n-1}_{k=0}\ 2^k.+\Sigma^{n-2}_{k=0}\ 2^kM_n\ =\ M_n+(2^{n-1}-1)M_n\ =\ 2^{n-1}M_n$$

すなわち、完全数である。

実は逆に偶数の完全数が $2^{n-1}M_n$ の形に限られることもオイラーによって証明されている。

6.　補遺：JAPLA 研究会における数の研究

鈴木義一郎　2012/2/25　素数について
西川利男　　2011/5/28　ピタゴラス数は何通りあるか

西川利男	2011/5/28	10 進数変換を使ったカプレカー数
西川利男	2011/4/23	ピタゴラス数・シルバーマンの数論
志村正人	2011/4/23	カプレカ数を J で
西川利男	2011/3/26	ピタゴラス数ーJ でやってみる
中野嘉弘	2011/1/22	素数階乗（幸運数）
西川利男	2010/8/5-7	フィボナッチ数列を巡る J のコード
森澤一弘	2009/12/5	ノブナンバーのプログラムを J で作成
西川利男	2009/2/28	q:素因数分解から約数を求める。（友愛数／親和数）
中野嘉弘	2009/2/28	友愛数の計算法へのコメント
山下紀幸	2009/2/28	山下流友愛数関数
西川利男	2008/11/25	エジプト数への和の展開
鈴木義一郎	2008/1/26	幸運数（改訂版）
西川利男	2007/6/23	フィボナッチ数列を巡る 2,3 の話題
中村慶一	2006/4/22	幸運数と回帰数
中村慶一	2006/3/25	幸運数と回帰数
竹内寿一郎	2006/1/28	ベルギー数について
鈴木義一郎	2005/9/25	幸運数について（改訂版）
鈴木義一郎	2005/8/6-8	幸運数について
鈴木義一郎	2005/7/23	幸運数について
中村慶一	2005/7/23	数楽問題・幸運数
中村慶一	2005/6/24	数楽問題・幸運数
中野嘉弘他	2005/4/23	多倍長計算・メルセンヌ数、リュカテスト
中野嘉弘他	2005/3/26	メルセンヌ数 M42 の最新ニュース