エクゾチックオプション価格のシミュレーション　その１
―キャッシュデジタルとプレインバニラオプション―
Numerical Tests on the Exotic Option Pricing Models　－１－
－ Cash-digital and Plain-vanilla Option Pricing Models －

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎
本田　皓士

１．はじめに

2000 年 12 月のシンポジウムでの志村氏の経済時系列に関する報告書に刺激され[1]、今年の夏の合宿以降、ブラック・ショールズのオプション価格式の導出法について述べてきた[2],[3]。そこでは主に価格のランダムな変動は 2 項確率過程とし、その極限としてブラウン運動による価格変動を導き、ブラック・ショールズのオプション価格式を求める方法であった。鶏と卵のように、2 項型かブラウン型かどちらが先に考えられていたかは詳しくは分からないが、世にいうブラック・ショールズ型の公式は連続時空間における微分方程式の解として得ることができるが、ここではブラウン運動を含む価格の式からその確率分布と期待値を求め、いわゆるブラック・ショールズのオプション価格式なるものを導出する。まずそれを簡単に述べ、その後応用としてそのいろいろなヴァリエーション（それを一般にエキゾチックオプションという）について次回以降取り上げてゆくことにする。

これまでに述べてきたブラック・ショールズのオプション価格式は、エキゾチックオプションの分類からいうと、デジタルオプションとよばれるオプションに属し、通常プレインバニラオプションとよばれ、アセットデジタルオプション、とキャッシュデジタルオプションの組合せからなるものである。

派生証券（オプション）には実に多くの種類の取引方法が考えられており、そのそれぞれについていろいろ研究されていて、その全ての詳細を述べるわけにはゆかないが、取引の中で現在もっとも多く行われているバリアオプション、その変形であるルックバックオプション、コンパウンドオプション、など、それらの理論とシミュレーションによる確認方法について順次ここに紹介することにする。

２．連続時空間でのオプションプライシングの数理

ここでは連続時空間を考え、ブラウン運動に基づくオプション価格の求め方について改めて述べてみる。原資産価格を S、単位時間あたりのドリフト率を μ、ボラティリティを σ として、その価格変動について次の幾何ブラウン運動を仮定する。

(1)　$dS = \mu S dt + \sigma S dz$

ここで、dz は標準ブラウン運動における増分を表す確率変数である。右辺に S が入っていることにより相対変動が正規分布に従うことが分る。このとき、オプション価格のプライシングもあたかも原資産のように確率過程に従うものとして、価格 S は

(2)　$dS = rSdt + \sigma S d\hat{z}$

を満たすものとする。ここで r は無リスク世界における金利とし、$d\hat{z}$ は上と同じく標準ブラウン運動における増分を表す確率変数である。

この微分方程式は $d\hat{z}$ が確率変数なので確率微分方程式として解かねばならない。ところで (1) の確率微分方程式を満たす $S(t)$ は

(3)　$d\ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz$

という方程式を満たすことが解っている。このことを証明するにあたって使われるのが有名な伊藤の公式とよばれる定理である。それを簡単に言葉であらわすと、確率変数を含む任意の関数を時間 t と確率変数の 2 変数テーラー展開で近似したとき、確率変数の増分 $(dz)^2$ が dt となることが基本になっている。標準ブラウン運動過程は、平均 0、分散 1 × (時間の長さ) の正規分布に基づいているので、ある時間間隔での運動過程の長さは特定できない (微分不可能) が、分散は時間の長さになるという原理に基づいている。これらの解説についてはいろいろな文献に詳しく述べられているのでここでは省略することにする (例えば今年の JAPLA 夏合宿での高山報告【4】をはじめ、主要文献を参照のこと【5】、【6】、【7】)。

そうすると、(2) について伊藤の定理を適用すると、

(4)　$d\ln S = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma d\hat{z}$

はじめの時点を t、満期を T とし、ブラウン運動の分散は σ^2 ×時間であることを考慮して、(4) を書き直すと、

(5)　$\ln S(T) - \ln S(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\omega$

すなわち、$\ln S(T) - \ln S(t)$ は平均 $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$、分散 $(\sigma\sqrt{T-t})^2$ の正規分布に従うので、

(6)　$\dfrac{\ln\{S(T)/S(t)\} - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \sim \quad N(0,1^2)$

が標準正規分布に従うことが分かる。(6) の関係式から $S(T)$ の分布 $f(S(T))$ は明示的に表すことができ、そのとき、

(7)　$x = \dfrac{\ln\{S(T)/S(t)\} - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

とおくと、

(8)　$f(S(T))dS(T) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\} dx$

であることが分る。

３．キャッシュデジタルオプションの価格式

キャッシュデジタルオプションとは、原資産価格が $S(t)$ のとき、満期 T 時点での価格が K 以上のときにオプションを行使して、キャッシュ A を取得する権利を買うことである。

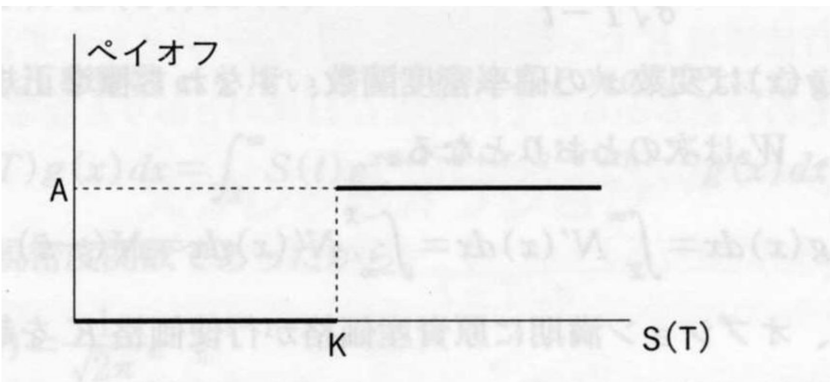

図１．キャッシュデジタルオプションのペイオフ

図１．はそのときの $S(T)$ に対するペイオフを図示したものである。時点 T で S が K 以下

のときはオプションを行使しないから損・得は生じない。ただし、実際には手数料を払わなければならないから損をすることになるが、ここでは手数料は考えないことにする。

$S(T)$ の分布が分かれば $S(T)$ が K 以上になる確率に A を乗ずればキャッシュデジタルオプションの価格が求められるので、(7) の変換を用いて (8) の積分を実行すればよい。$S(T)$ を K から無限大まで積分するので、(7) の $S(T)$ に K を代入して $x0$ を求めると、

(9) $$x0 = \frac{\ln\{K/S(t)\} - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、$S(T)$ が無限大のときは x も無限大であるから、結局 (8) を $x0$ から無限大まで積分した値が求める確率となり、それに A を乗ずると求めるオプション価格になる。標準正規分布の分布関数 (累積分布関数) を $\Phi(u)$ と書くとすると求める確率は、1-$\Phi(x0)$ であり、正規分布の対称性から

(10) $$\text{"求める価格"} = A\{1 - \Phi(x0)\} = A\Phi(-x0)$$

となる。ここで $x0$ は (9) で与えられる。そして (9) の式の符号を変えた式、

(11) $$d = \frac{\ln\{S(t)/K\} + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

を用い、更に"求める価格"を現在価値に修正した価格がオプション価格 C であるから、

(12) $C = Aexp\{-r(T-t)\}\Phi(d)$、　　このとき、$d = -x0$ である。

と表される。

４．プレインバニラコールオプションの価格式

前節は原資産 $S(T)$ の価格に対してキャッシュを得るというオプションであったが、ここでは満期 T で S の価格が K 以上のとき、$S(T)$ を K で買えるという権利を買うオプションの価格を考える。プレインバニラコールオプションでは満期 T 時点で、原資産 $S(T)$ が K 以上のときは権利を行使して K を支払って原資産 (アセット) を買えるから、$S(T) - K$ の利得があるが、K 以下のときは権利を行使しないので損失はない。すなわち、ペイオフは $Max(S(T) - K, 0)$ と書くことが出来、これを $S(T)$ の分布に関して期待値をとればよいことになる。すなわち、

(13) $$E\{Max(S(T)-K,0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Max(S(T)-K,0) f(S(T)) dS(T)$$
$$= \int_K^{\infty} \{S(T)-K\} f(S(T)) dS(T) = \int_K^{\infty} S(T) f(S(T)) dS(T) - K\int_K^{\infty} f(S(T)) dS(T)$$
$$= W_1 + KW_2$$

ここで第 2 項の KW_2 という積分はキャッシュデジタルオプションそのものであるから、前節 (12) 式と書けるので、W_1 だけ解けばよいことになる。

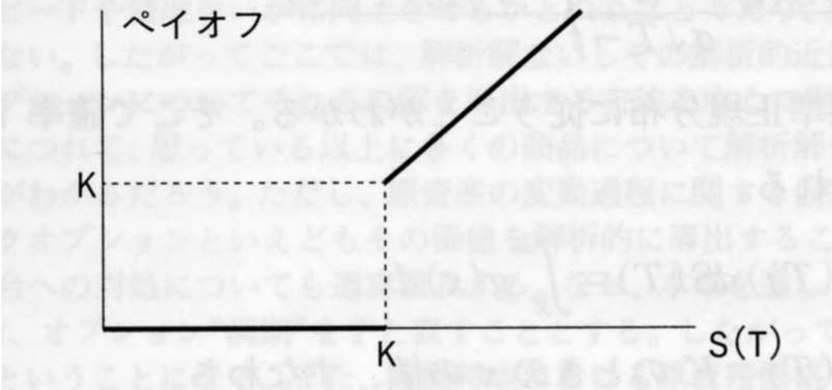

図２．アッセトデジタルオプションのペイオフ

ここで、アセットデジタルオプションのペイオフを考える。原資産の価格 $S(T)$ が K 以上のとき、利得 $S(T)$ が発生するから、その期待値は $S(T)$ を x に変換することによって求められる。、

$$(14) \qquad W_1=\int_K^\infty S(T)f(S(T))dS(T)=\int_{x0}^\infty S(t)e^{x\sigma\sqrt{T-t}+(r-\sigma^2/2)(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

ここで $x0$ は $S(T)=K$ を満たす点で、(9) で計算することができる。(14) をさらに整理すると、

$$(15) \qquad \begin{aligned} W_1 &= S(t)e^{r(T-t)}\int_{x0}^\infty e^{x\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= S(t)e^{r(T-t)}\int_{x0}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T-t})^2}dx \\ &= S(t)e^{r(T-t)}\int_{x0-\sigma\sqrt{T-t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = S(t)e^{r(T-t)}\Phi(-x0+\sigma\sqrt{T-t}) \end{aligned}$$

アセットデジタルオプション価格はこれを現在価格に直して、

$$(16) \qquad e^{-r(T-t)}W_1=S(t)\Phi(-x0+\sigma\sqrt{T-t})=S(t)\Phi(d+\sigma\sqrt{T-t})$$

以上のことを総合して、プレインバニラコールオプションの価格式は、(16) から (12) を引くことによって得ることができる。

$$(17) \qquad C=S(t)\Phi(d+\sigma\sqrt{T-t})-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d)$$

となる。このとき d は (11) で表される。これがブラック・ショールズのオプション価格式として最もよく知られている公式である。

５．Ｊによるオプション価格の数値テスト

ここでＪの関数でブラウン運動に従う資産の価格系列をつくり、行使価格 K に対し平均取得額が幾らになるかを計算して、ブラック・ショールズの価格式と比較してみることにする。

まず、正規分布に関するいろいろな関数を定義する。

```
NB. ============================================
NB. Normal Distribution : High Precision
NB. Ndist(u)=NP(u>0)=Phi(u)=1-NQ(u>0)
NB. ============================================
   stnormal=:(%:@o.@2:)(%~)^@-@-:@*:
NB. When u>0 is small
   NP=:3 : 0
(stnormal y.)*y.%(-‘%‘+‘%)/,(>:+:k),.(*:y.)*>:k=.i.28
)
NB. When u>0 is large
   NQ=:3 : 0
(stnormal y.)*%‘+/1,,y. ,.>:i.28
)
NB. Standard Normal Distribution Function Phi(u)
   Ndist=:3 : 0
if. 3.3<z=:|y. do. q=:NQ z else. q=:0.5-NP z end.
if. 0<:y. do. q=:1-q end.
```

```
)
NB. ==========================================
NB. Yamanouti's Formula : Percent Point  u(alpha)
NB. ==========================================
   Ninv_y=:3 : 0
z=.-^.4*y.*(1-y.)
x=.%:z*(2.0611786-5.7262204%(z+11.640595))
if. y.>0.5 do. x=.-x end.
)
NB. ==========================================
NB. Black Scholes Model
NB. M.Shimura Nov. 2000
NB. ussage: bs data
NB. data is list ( 5 block)
NB. AssetPrice ExecPrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=. 14500 14000 2 38 6
NB. ==========================================
bs =: 3 : 0
'a b c d e'=. y.
t=. c % 12
u=. (^. a % b) + t* (e1=.e % 100) - -:(bol=.d % 100) ^2
p2=. u % (bol * %: t)
p1=. p2 + bol * %: t
n1=. Ndist p1
n2=. Ndist p2
bs=. (a * n1 ) - b *n2 *( ^ (-e1) * t)
bs
)
NB. ==========================================
NB. Cash-Digital Option Model
NB. M.Shimura & J.Takeuchi Dec. 2006
NB. ussage: cd data
NB. data is list ( 6 block)
NB. AssetPrice ExetPrice AcceptPrice Term(Month) Volatility FreeRate
NB. ex. data=. 14500 14000 15000 2 38 6
NB. ==========================================
cd =: 3 : 0
'a b1 b2 c d e' =: y.
t=. c % 12
u=. (^. a % b1) + t* (e1=.e % 100) - -:(bol=.d % 100) ^2
p2=. u % (bol * %: t)
n2=. Ndist p2
```

```
cd=. b2 *n2 *( ^ (-e1) * t)
)
NB. ============================================
NB. Normal Random Numbers
NB.    Rndm_Norm Size Mu Sigma
NB. ============================================
   Rndm_Norm=:3 : 0
'Num Mean Sigma'=.y.
Mean+Sigma*Ninv_y"0 (?Num#10000000)%10000000
)
```

NB. ここからオプション価格のシミュレーションの関数である。

```
NB. ============================================
NB. N Cash_Digital S K A T(Month) Volality r
NB. ============================================
   Cash_Digital=:4 : 0
'S0 K A T Vol r'=.y.
i=.0[MM=.x.
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(%:1%12)*z
goto_L1.
label_owari.
w=.S-K
C=.(^-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)*A
)
NB. ============================================
NB. N Plain_Vanilla S K T(Month) Volality r
NB. ============================================
   Plain_Vanilla=:4 : 0
'S0 K T Vol r'=:y.
i=.0[MM=.x.
label_L1.
if. T<i=.>:i do. goto_owari. end.
z=.Rndm_Norm MM,0,1
S=.S+(S*(r%100)*(1%12))+S*(Vol%100)*(%:1%12)*z
goto_L1.
label_owari.
w=.S-K
C=.(^-(r%100)*(T%12))*MM%~+/(0<w)#w
)
```

●実行例
まずは、キャッシュデジタルオプションで期間 12、6、24 か月でテスト

```
   1000 Cash_Digital 100 90 110 12 10 10
97.2429
   cd 100 90 110 12 10 10
97.2871
   1000 Cash_Digital 100 90 110 6 10 10
103.066
   cd 100 90 110 6 10 10
103.032
   1000 Cash_Digital 100 90 110 24 10 10
88.0791
   cd 100 90 110 24 10 10
88.4055
```

次に、プレインバニラオプションで期間 12、6、24 か月でテスト

```
   1000 Plain_Vanilla 100 90 12 10 10
18.7014
   bs 100 90 12 10 10
18.6309
   1000 Plain_Vanilla 100 90 6 10 10
14.2557
   bs 100 90 6 10 10
14.4216
   1000 Plain_Vanilla 100 90 24 10 10
27.1752
   bs 100 90 24 10 10
26.3807
```

シミュレーションは 1000 回の系列を作成して行ったが、理論値と比べるとほぼ合っていることが分かる。

【参考文献】

【1】志村正人（2000）：ブラック・ショールズのプログラム　JAPLA2000 シンポジウム　2000.12.16　統計数理研究所

【2】竹内寿一郎（2006）：ブラック・ショールズのオプション価格の式について　JAPLA 研究会　2006.8.5-7 APL 協会夏合宿資料

【3】竹内寿一郎（2006）：オプション価格の 2 項確率過程からブラウン運動へ　JAPLA 研究会　2006.10.28 資料

【4】高山武士（2006）：ブラウン運動と確率微分方程式　JAPLA 研究会　2006.8.5-7 APL 協会夏合宿資料

【5】森真、藤田岳彦 (1999)：確率・統計入門　－数理ファイナンスへの適用－　講談社サイエンティフィク

【6】蓑谷千凰彦 (2000)：ブラック・ショールズモデル、東洋経済社

【7】山下司 (2001)：オプションプライシングの数理　－基礎理論と専門書のブリッジテキスト－金融財政事情研究会