ナッシュ均衡を計算する
Game Theory(その 1)
To calc a Nash Equilibrium

Masato Shimura

09/Dec./2006

目次

ジョン · ナッシュ

⊕(ナッシュを描いた映画「ビューティフル · マインド」(2001 年パラマウント配給) のあるシーン

プリンストン大学院の学生ホールで。(キューンらしき学生)

「忘れたのか、近代経済学の父、アダムスミスの言葉を。競争社会では個人の野心が皆の利益に」

「アダム・スミスは言った。最良の結果は皆が自分の利益を追求して得られると。それ

じゃ不完全だ。最良の結果は皆が自分と集団の利益を追求して得られる。全てを支配する法則だ。アダム・スミスは間違ってた」

⊕ 大学院の博士論文審査で、(キューン · タッカー条件で知られるタッカーと思しき教授) ナッシュの論文をめくりながら

「150 年来の経済理論を覆すことになるがね。」

「承知です」

「大胆すぎる」

「確かに」

「ナッシュ君 画期的な成果だ。どこにでも推薦しよう。」

この 1950 年のナッシュの 20 ページ足らずの論文に対し、1994 年にノーベル経済学賞が贈られた。

1　非協力ゲームとナッシュ均衡

フォン · ノイマンとモルゲンシュタインの大著「ゲーム理論と経済行動」(1944) からゲーム理論は始まった。

フォン · ノイマンとモルゲンシュタインの段階ではミニマックス定理が主であった。[*1]

ゲームは非協力ゲームと協力ゲームに区分される。中間型としての協調 · 協力は双方でとりあつかわれる。

ゲームには勝ちの形があるものも有ればジレンマとして思い悩む形もある。

非協力ゲームでは解のほとんどがナッシュ均衡を見いだすことでありゲーム理論の金字塔と賞されている。

ナッシュ均衡は x^* **は** y^* **に対する最適反応であり、**y^* **は** x^* **に対する最適反応である。**と定義される。

最適反応とは与えられた相手の行動に対して、自己の利得が最大になるように選ぶ行動である。バブル時に拡張と競争に走った大手スーパーの惨状が示すように、自己の最適化の結果が全体の最適反応になるとは限らない。

[*1] フォン · ノイマンはナッシュ均衡を一瞬で不動点定理の応用だと見抜いたようだ。開拓者は大魚を釣り尽くさない。

1.1　ゼロサム・ジレンマゲーム

ゼロサムゲームはミニマックス解を求めることが中心である。

working Example このゼロサムゲームではミニマックス解は まずいリンゴ; 酸っぱい蜜柑である。

このミニマックス解が (D) ナッシュ均衡となる。

一方パレート最適は

A	B
C	D

のおいしいを含む A,B,C である。

リンゴ・蜜柑	おいしい蜜柑	酸っぱい蜜柑	-10	
おいしいリンゴ	5 5	-10 10	-55	
酸っぱいリンゴ	10 -10	-5 -5		

これは環境汚染などに置き換えることができ、濡れ手のままのナシュ均衡、犠牲を伴うパレート最適は厚生経済学でも応用されている。

1.2　混合戦略・2 次の場合

ゲームの組み合わせでは純粋戦略である支配戦略が存在しないことは多い。

この場合、確率により戦略を選択する混合戦略が取られることが多い。(ミニマックス戦略を取りうる範囲は狭い)。

混合戦略	展開すると
$\begin{array}{c\|\|c\|c} A\backslash B & y & 1-y \\ \hline\hline x & xy & x(1-y) \\ \hline 1-x & (1-x)y & (1-x)(1-y) \end{array}$	$\begin{array}{c\|\|c\|c} A\backslash B & y & 1-y \\ \hline\hline x & xy & x-xy \\ \hline 1-x & y-xy & -x-y+xy+1 \end{array}$

数式処理で展開していく方法といきなり連立方程式の係数行列に持ち込む方法がある。2 次の場合は、双方で確認してみよう。3 次、4 次となると J には後者の方法が向いているように思われる。

1.2.1　数式展開で解く

E を期待利得とする。

$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$ とすると

$E = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y)$

$m = ay - by - cy + dy + b - d$

$n = cy - dy + d$

として、プレイヤー 2 が確率 y でハンドを選ぶと、y を固定された定数と見なすことができる。プレイヤー 1 の期待値 E は

$E = mx + n$

としてあらわされる。

$m = 0$

$$y = \frac{d-b}{a+d-b-c}$$

同様に x について整理すると、次のようになる。

$$x = \frac{d-c}{a+d-b+c}$$

期待値 E は

$$E = mx + n = 0 + n = cy - dy + d = (c-d)\frac{d-b}{a+d-b-c} + d$$

$$= \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$$

2 次では xy か x,y 単独の項が出てくる。

1.2.2　J 流の解法

$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$	$\dfrac{ad-bc}{a+d-b-c}$

上の表の左が混合戦略の確率の表で、右は、開いて見やすくしたものである。偏微分のように xy の出てくる箇所に +− の符号を付けていく。右端は定数項で、x,y 単独で出現した箇所に同じく +− の符号を付ける。

	x	y	定数項
x	0	$\begin{array}{\|c\|c\|} + & - \\ \hline - & + \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|} & + \\ \hline & - \end{array}$

y	$\begin{array}{c\|c} + & - \\ \hline - & + \end{array}$	0	$\begin{array}{c\|c} & \\ \hline + & - \end{array}$

Working Example(単独行列の利得表)

次の表の左欄が利得表とすると、2 次では全部取るので、そのままの数値に +− の符号を上のように換えて合計を取ればよい。定数項は指定の 2 カ所を取り、符号を換えて合計する。係数行列を求める場合、左上袈裟懸けが +, 右上袈裟懸けが − の符号になる。

21 _3 _9 12	$\begin{array}{c\|c} 21 & -\_3 \\ \hline -\_9 & 12 \end{array}$	`= +/ 21 3 9 12 = 45`
	$\begin{array}{c} \_3 \\ \hline -12 \end{array}$	`=+/_3 _12=_15`
	$\begin{array}{c\|c} \_9 & -12 \end{array}$	`=+/ _9 _12=_21`
	$\begin{cases} 45x & = 15 \\ \quad 45y & = 21 \end{cases}$	0.466667, 0.333333

連立方程式をクラメール法で解くと、2 次で xy を区別しない利得表の場合はそのまま混合戦略の確率になる。A の戦略は $(x, 1-x) = 0.47, 0.53$ となり、B の戦略は $(y, 1-y) = 0.33, 0.67$ の確率での選択が推奨される。

```
   mix_2s GH0
+-----+--------+-----------------+
|21 _3| 0 45 15|0.466667 0.333333|
|_9 12|45  0 21|                 |
+-----+--------+-----------------+
```

Working Example(双行列の利得表)

次に、逢い引きのジレンマの混合戦略を計算する。利得表を AB に分割してそれぞれ計算すればよい。

男女のジレンマ	`gmatrix GN2`
	`+---+---+`
	`|2 1|0 0| A0` **オペラ**
	`+---+---+`
	`|0 0|1 2| A1` **サッカー**
	`+---+---+`
	`B0     B1`
	オペラ サッカー
		意地を張るとデートは出来ないので支配戦略はない。**相関戦略**と言われる話し合い、ジャンケン、コイントスなどにより合意すること (確率 $\frac{1}{2}$) を選択すると $\frac{3}{2}$ の利得を得る。
		(オペラ・オペラ)、(サッカー・サッカー) の相手を思いやる選択はナッシュ均衡である。少し相手を思いやる、女は $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ の確率で、男は $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ の確率で、オペラトサッカーを選ぶのもナッシュ均衡である。

```
 mix_2 GN2
+---+-----+-----------+--------+
|2 0|0 3 1|1 0 0.333333|0.333333| NB. MAN
|0 1|3 0 1|0 1 0.333333|        |
+---+-----+-----------+--------+
|1 0|0 3 2|1 0 0.666667|0.666667|NB. LADY
|0 2|3 0 2|0 1 0.666667|        |
+---+-----+-----------+--------+
```

A はオペラを $\frac{1}{3}$、サッカーを $\frac{2}{3}$ の確率で、B はオペラを $\frac{2}{3}$、サッカーを $\frac{1}{3}$ の確率で選ぶ。

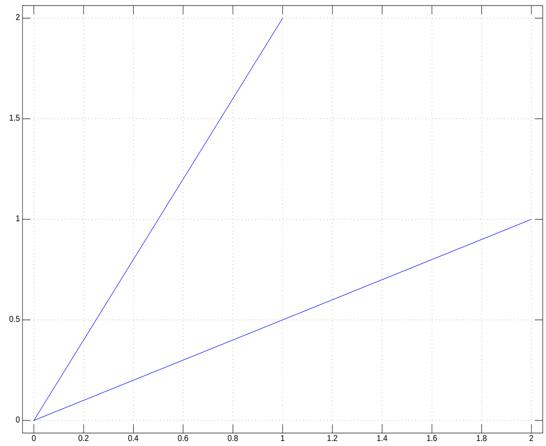
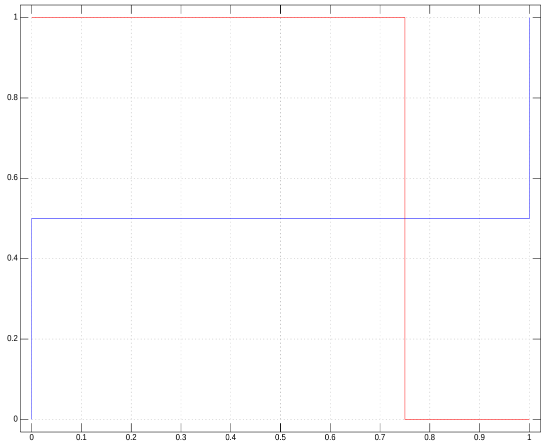


図 1　set of game

Working Example

次のような利得表を持つ混合戦略では、



hp

1, 1	2, 2
0.3	3, 0

```
 mix_2  1 1 ;2 2 ;0 3;3 0
+---+--------+--------+----+
|1 2|0 2 1   |1 0 1.5 |0.5 |
|0 3|2 0 3   |0 1 0.5 |    |
+---+--------+--------+----+
|1 2| 0 _4 _2|1 0 0.75|0.75|
|3 0|_4  0 _3|0 1  0.5|    |
+---+--------+--------+----+
```

A は $\frac{1}{2}$ の、B は $\frac{3}{4}$ の確率で戦略を選択するとよい。

ナッシュ均衡は 2 の図の交点で求められる。この点は不動点である。

1.3　3 次の場合

A,B の選択肢が 3 個になった場合。

$A\backslash B$	y	v	$1-y-v$
x	xy	xv	$x(1-y-v)$
u	uy	uv	$u(1-y-v)$
$1-x-u$	$y(1-x-u)$	$v(1-x-u)$	$(1-x-u)(1-y-v)$

(展開すると)

$A\backslash B$	y	v	$1-y-v$
x	xy	xv	$x-xy-xv$
u	uy	uv	$u-uy-uv$
$1-x-u$	$y-xy-uy$	$y-vx-uv)$	$1-x-y-u-v+xy+xv+uy+uv$

次のような表を作る。ここに +− を付けた箇所から得点を取得する。

0	1	2
3	4	5
6	7	8

そして x, y, u, v と定数項を含めての連立方程式を作成する。 連立方程式の解が x, y, u, v の値となる。

	x	y	u	v	定数項
x	0	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} + & & - \\ \hline & & \\ \hline - & & + \end{array}$	0	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} & + & - \\ \hline & & \\ \hline & - & + \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} & & + \\ \hline & & \\ \hline & & - \end{array}$
y	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} + & & - \\ \hline & & \\ \hline - & & + \end{array}$	0	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} & & \\ \hline + & & - \\ \hline - & & + \end{array}$	0	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} & & \\ \hline & & \\ \hline + & & + \end{array}$

u	0	$\begin{array}{c\|c\|c} & & \\ \hline + & & - \\ \hline - & & + \end{array}$	0	$\begin{array}{c\|c\|c} & & \\ \hline & + & - \\ \hline & - & + \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c} & & \\ \hline & & + \\ \hline & & - \end{array}$
v	$\begin{array}{c\|c\|c} & + & - \\ \hline & & \\ \hline & - & + \end{array}$	0	$\begin{array}{c\|c\|c} & & \\ \hline & + & - \\ \hline & - & + \end{array}$	0	$\begin{array}{c\|c\|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & + & - \end{array}$

Working Example (3 次 · 単行列)

次のデータを入れてみる。

$A \backslash B$	y	v	$1-y-v$
x	0	15	-5
u	5	0	24
$1-x-u$	13	8	0

```
 3 3 $ GH1
0 15 _5
5  0 24
13  8  0
```

(出典 平下 文献参照)

$$E = \begin{array}{ccc} 0xy & +15xv & -5x(1-y-v) \\ 5uv & +0uv & +24u(1-y-v) \\ +13(1-x-u)y & +8(1-x-u)v & +0(1-x-u)(1-y-v) \end{array}$$

$= -5x + 13y + 24u + 8v - 8xy + 12xv - 32uy - 32uv$

連立方程式は次のとおりで、x, y, u, v を求める。

ハンドは x, y, u, v から、プレイヤー A は $x, u, 1-x-u$, Y は $y, v, 1-y-v$ が求められる。

$$\left\{ \begin{array}{c|ccccccc} x & & -8y & & +12v & = & 5 \\ y & -8x & & -32u & & = & -13 \\ u & & -32y & & -32v & = & -24 \\ v & 12x & & -32u & & = & -8 \end{array} \right.$$

```
   mix_3s  GH1
+--------+--------------------+---------------+
| 0 15 _5| 0  _8   0  12   5  |1 0 0 0   0.25|
| 5  0 24|_8   0 _32   0 _13  |0 1 0 0    0.2|
|13  8  0| 0 _32   0 _32 _24  |0 0 1 0 0.34375|
|        |12   0 _32   0  _8  |0 0 0 1   0.55|
+--------+--------------------+---------------+
|A       |0.25 0.34375 0.40625|               |
+--------+--------------------+---------------+
|B       |0.2 0.55 0.25       |               |
+--------+--------------------+---------------+
```

2　ナッシュ均衡に迫ろう

Matrix の作成	gmatrix	
2 次	mix_2 min_2s	
3 次	mix_3 mix_3s	
Plot	plot_nash0/2	

利得テーブル

```
+------+----+
|_24 12|4 _6|
+------+----+
|6 _8  |_2 2|
+------+----+
```

gmatrix GS07 で表示される

J での入力方法

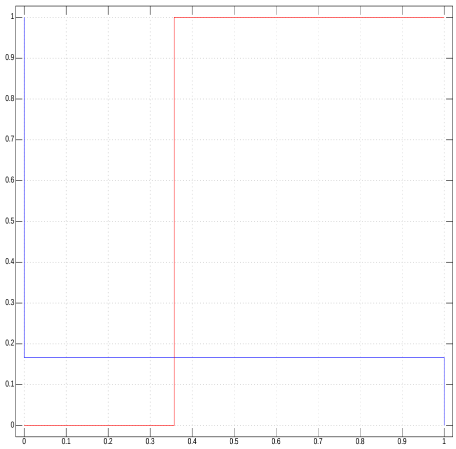
```
] GS07=:_24 12; 4 _6; 6 _8; _2 2

+------+----+----+----+
|_24 12|4 _6|6 _8|_2 2|
+------+----+----+----+
```

2.1　Example

Example 1

```
 gmatrix GS07
+------+----+
|_24 12|4 _6|
+------+----+
|6 _8  |_2 2|
+------+----+
```

```
 mix_2 gmatrix GS07
+------+----------+------------+
|_24  4|  0 _36 _6|1 0 0.222222|
|  6 _2|_36   0 _8|0 1 0.166667|
+------+----------+------------+
|12 _6 | 0 28   8 |1 0 0.357143|
|_8  2 |28  0 10  |0 1 0.285714|
+------+----------+------------+
```



A の解は 1r6、B は 5r14 で、連立方程式の解の現れる場所は同じである。

```
 _1 x: 1r6
0.166667

 _1 x: 5r14
0.357143
```

出典:鈴木光男「ゲーム理論入門 (新装版)」共立出版 2003

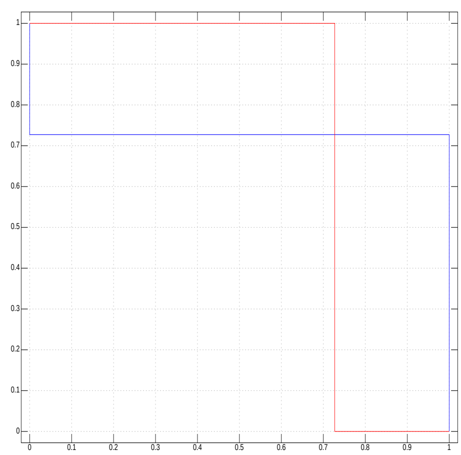
2.1.1　0 やマイナスの解が出た場合

0 やマイナスの解が出た場合は、解が辺に属し、確率が 0 か 1 になる。[*2]

[*2] 不動点をゴムを引っ張って離す場合と考えると、どちらかが持ったままで片方が手を離したじょうたいである。4 手の引っ張り合いなら 2 手が離れた状態になる。

Example 2

```
  gmatrix GS09
+----+-----+
|0 0 |10 6 |
+----+-----+
|6 10|_6 _6|
+----+-----+


   mix_2 GS09
+-----+----------+-----------+
|0 10 |  0 _22 _16|1 0 0.545455|
|6 _6 |_22   0 _12|0 1 0.727273|
+-----+----------+-----------+
| 0  6|  0 _22 _12|1 0 0.727273|
|10 _6|_22   0 _16|0 1 0.545455|
+-----+----------+-----------+
```



(8r11,8r11)

出典:鈴木光男「ゲーム理論入門 (新装版)」共立出版 2003

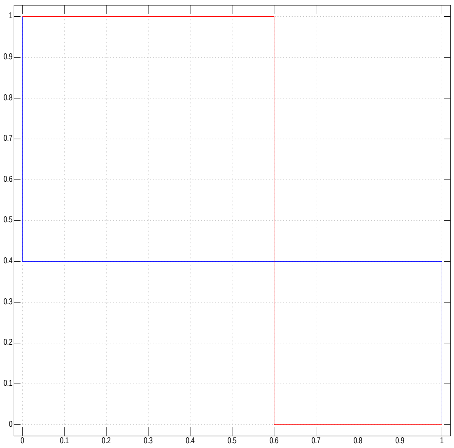
Example 3

逢い引きのジレンマ、野球と芝居

```
  gmatrix GS06
+-----+-----+
|2 1  |_1 _1| BB BS
+-----+-----+
|_1 _1|1 2  | SB SS
+-----+-----+
```

```
   mix_2  GS06
+-----+-----+-------+
| 2 _1|0 5 2|1 0 0.4|
|_1  1|5 0 2|0 1 0.4|
+-----+-----+-------+
| 1 _1|0 5 3|1 0 0.6|
|_1  2|5 0 3|0 1 0.6|
+-----+-----+-------+
```

r

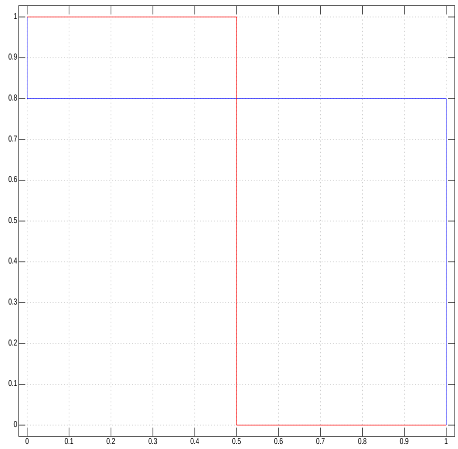


```
   nash_2 GS06
+---+-------+---+
|2 1|0.4 0.6|1 2|
+---+-------+---+
```

出典:鈴木光男「ゲーム理論入門 (新装版)」共立出版 2003

Working Example

```
   gmatrix GF10
+---+---+
|1 5|4 6|
+---+---+
|2 3|0 2|
+---+---+

   mix_2 GF10
+---+--------+-------+
|1 4| 0 _5 _4|1 0 0.4|
|2 0|_5  0 _2|0 1 0.8|
+---+--------+-------+
|5 6| 0 _2 _4|1 0 0.5|
|3 2|_2  0 _1|0 1   2|
+---+--------+-------+
```



Working Example

```
 gmatrix GF12
+---+---+
|2 3|0 6|
+---+---+
|4 0|1 1|
+---+---+

   mix_2 GF12
+---+--------+--------+
|2 0| 0 _1  1|1 0  3  |
|4 1|_1  0 _3|0 1 _1  |
+---+--------+--------+
|3 6| 0 _2 _5|1 0 _0.5|
|0 1|_2  0  1|0 1  2.5|
+---+--------+--------+
```

$p = \_0.5, q = \_1$

双方がマイナスである。

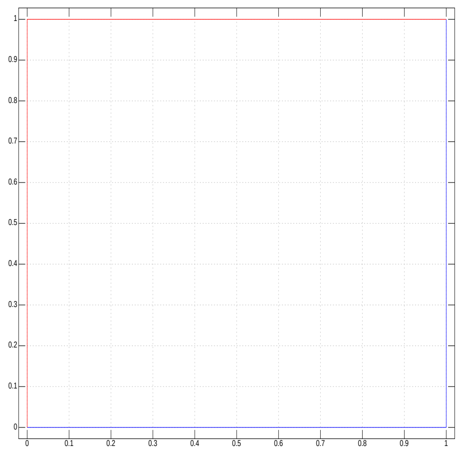
$0 \leq q_1 \leq 1 \quad p_1 = 0$
$0 \leq p_1 \leq 1 \quad q_1 = 0$

```
pd  0 0 ; 0 1
pd  0 1 ; 0 0
```

となる
出典:舟木 演習ゲーム理論 P21

Working Example

```
   gmatrix GF13
+-----+-------+
|1 1  |100 0  |
+-----+-------+
|0 100|100 100|
+-----+-------+
   mix_2 GF13
+-------+-------+-------+
|1 100  |0 1   0|1 0 100|
|0 100  |1 0 100|0 1   0|
+-------+-------+-------+
|  1   0|0 1 100|1 0   0|
|100 100|1 0   0|0 1 100|
+-------+-------+-------+
```



$p = 0, q = 0$

双方がマイナスである。

```
pd  0 1 1 ; 0 0 1
pd  0 0 1 ; 0 1 1
```

となる

出典:舟木 演習ゲーム理論 P22

3　もう一つのナッシュ均衡・ナッシュの交渉問題

3.1　Reference

舟木 由喜彦 演習ゲーム理論 新世社 2004

平下 幸男 数理科学のレッスン 産業図書 1992

鈴木光男「ゲーム理論入門 (新装版)」共立出版 2003