２次応答関数を用いた分散分析表
一元配置・完全無作為化法の場合

慶応義塾大学理工学部
竹内寿一郎

１．はじめに

実験計画法の講義では往々にして分散分析表を作成するための計算方法の教授に偏り、その意味を十分説明出来ないままで終わることが多かった。分散分析表を計算する J 言語のプログラムは Smillie によるものが有名で [1]、竹内により JAPLA 研究会で紹介されている [2]。これを利用して応答関数に２次関数を仮定し、乱数を加えて観測値を人工的に作成し、いろいろなパラメタに対して分散分析表を作成してその有効性の検討が行えるようなシステムを構築することを目指した。

２．２次応答関数による構造モデル

応答関数は以下の２次式を仮定する。

$y = (x-a)^2 + b + e$、　a、b は定数、e は標準正規分布 $N(0,1^2)$ に従う確率変数

ここでは、最適値 $a = 2.5$、最小値 $b = 5$ として人工的に観測値を作成した。

```
NB.   AOV Model, One Way Layout

NB.   generate normal random varibles from 12 uniform random numbers
   Rndm=:3 : '_5.999+(+/"1?(y.,12)$100000)%100000'
NB.   quadratic response function
   fn1=:11.25 _5 1&p. NB.(x-2.5)^2+5==>x^2-5x+11.25
NB.   generate four points of interval y. for center 2.5
   point=:3 : '2.5+(_1.5 _0.5 0.5 1.5)*y.'
NB.   generate data of 4 levels by repetitions x.
   Fn1=:4 : 0
(Rndm $z)+z=.x.#,:fn1 y.
)
```

【1】$A_1 : x = 1$、$A_2 : x = 2$、$A_3 : x = 3$、$A_4 : x = 4$、繰り返し数 $n = 5$　最適値 2.5 を中心に幅 1 として 4 水準をとった。

【2】$A_1 : x = 1.45$、$A_2 : x = 2.15$、$A_3 : x = 2.85$、$A_4 : x = 3.55$、繰り返し数 $n = 5$　最適値 2.5 を中心に幅 0.7 として 4 水準をとった。最適値の付近では変化が小さいために有意差が出にくくなると思われる。

【3】$A_1 : x = 1.45$、$A_2 : x = 2.15$、$A_3 : x = 2.85$、$A_4 : x = 3.45$、繰り返し数 $n = 10$　最適値 2.5 を中心に幅 0.7 として 4 水準をとり、観測値を増やしてみた。変化が小さくとも繰り返し数が増えれば有意差が出やすくなることが期待される。

３．各モデルによる結果

【モデル１】$A_1 : x = 1$、$A_2 : x = 2$、$A_3 : x = 3$、$A_4 : x = 4$、繰り返し数 $n = 5$

```
   DATA1=.5 Fn1 point 1
   DATA1
 7.5652 5.38525 6.38359 7.15142 7.64221
6.73035 5.67498 3.32611 5.53201 4.03091
3.90604 6.39043 5.73018 4.26129 4.59514
8.04837 8.13776 6.28239 4.88261   7.902

   (1 2$'A ')AOV D1
-------------------------------------------------
Source    d.f.         S.S.      mean sq.        F0
-------------------------------------------------
A            3     18.58203      6.19401     4.19769
Error       16     23.60920      1.47558
-------------------------------------------------
Total       19     42.19124
-------------------------------------------------
```

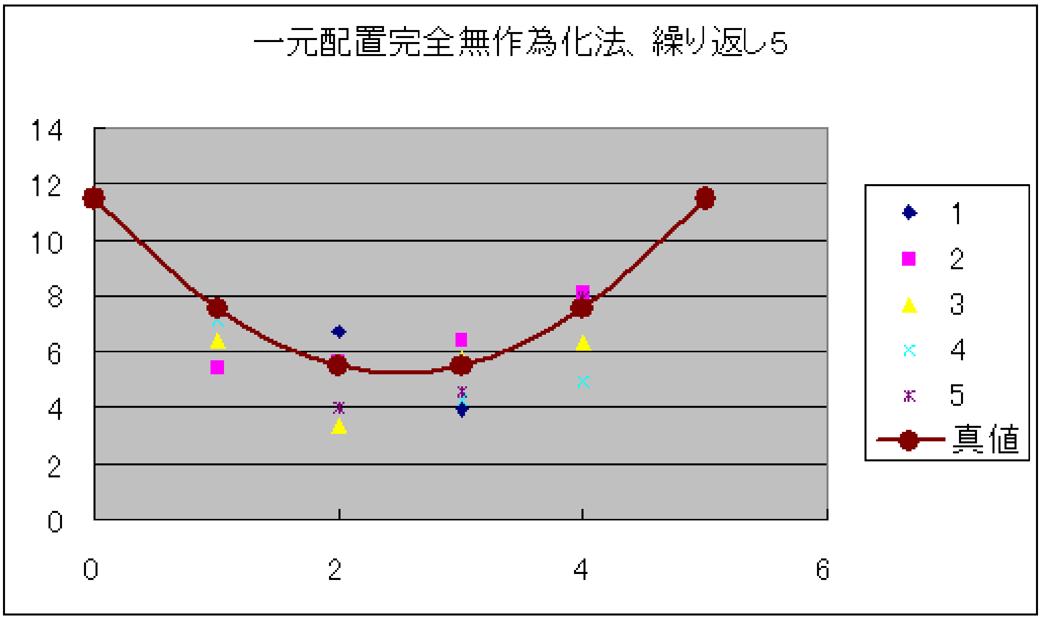

図１．一元配置・完全無作為化法、４水準、繰り返し数５
$(a = 2.5,\ b = 5,\ n = 5,\ Interval = 1)$

x が１～４の幅であれば分散１の正規乱数を加えたとしても、水準による違いが大きく、ほぼ有意水準 5%で仮説が棄却される。

【モデル２】$A_1 : x = 1.45$、$A_2 : x = 2.15$、$A_3 : x = 2.85$、$A_4 : x = 3.55$、繰り返し数 $n = 5$

```
   DATA2=.5 Fn1 point 0.7
   DATA2
5.48515 6.75324 6.52646 8.53527 6.89115
6.38637 4.65813 4.62184  4.3171 6.63495
5.75182 4.58099 4.71279 5.74309 5.60617
6.79873 8.09027 6.90589 5.82505 4.83035


   (1 2$'A ')AOV DATA2
-------------------------------------------------
Source    d.f.        S.S.      mean sq.        F0
-------------------------------------------------
A            3      9.59464      3.19821     3.01097
Error       16     16.99500      1.06219
-------------------------------------------------
Total       19     26.58964
-------------------------------------------------
```

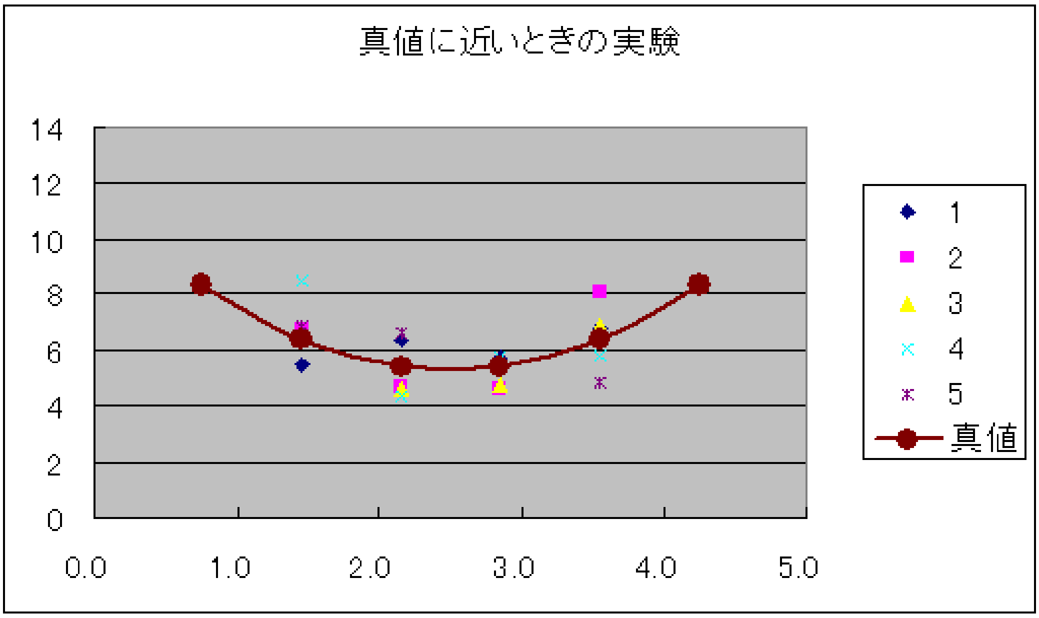

図 2．一元配置・完全無作為化法、4 水準、繰り返し数 5
$(a = 2.5,\ b = 5,\ n = 5,\ Interval = 0.7)$

最適値付近で x の幅が 1.45〜3.55 と区間幅が 0.7 に縮まることによって、特性値の変化が相対的に小さくなり、乱数の影響が大きくなって 5%検定では有意にならない場合が多く見られるようになる。

【モデル 3】$A_1 : x = 1.45$、$A_2 : x = 2.15$、$A_3 : x = 2.85$、$A_4 : x = 3.55$、繰り返し数 $n = 10$

```
   DATA3=.10 Fn1 point 0.7
   |:DATA3
```

```
5.48515 6.38637 5.75182 6.79873
6.75324 4.65813 4.58099 8.09027
6.52646 4.62184 4.71279 6.90589
8.53527  4.3171 5.74309 5.82505
6.89115 6.63495 5.60617 4.83035
6.58019 5.83067 5.11892 7.15034
6.22389 4.27484 5.19373 3.32011
6.09753 4.90435 6.10052 9.54786
 8.1165 5.05414 3.09461 5.15649
8.05117 3.93814 4.71554 5.77138
   (1 2$'A ')AOV D1
-------------------------------------------------
Source    d.f.        S.S.      mean sq.        F0
-------------------------------------------------
A            3     26.39713      8.79904     6.20075
Error       36     51.08505      1.41903
-------------------------------------------------
Total       39     77.48218
-------------------------------------------------
```

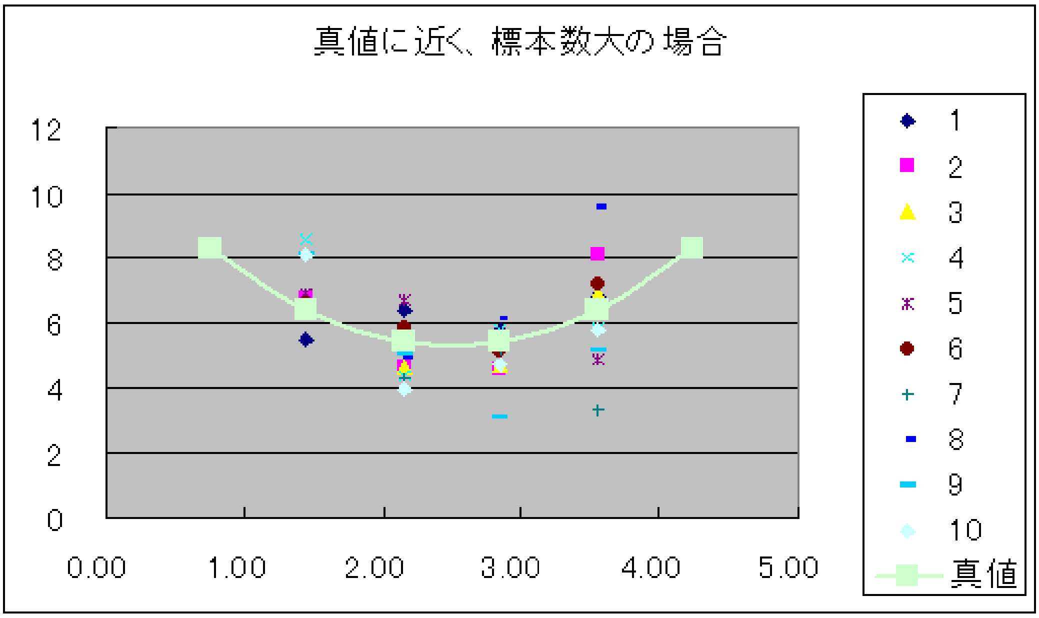

図 3．一元配置・完全無作為化法、4 水準、繰り返し数 10
$(a = 2.5,\ b = 5,\ n = 10,\ Interval = 0.7)$

繰り返し数を増やすことにより検出力が増加し、最適値付近で誤差に比べて変化の割合が相対的に小さくても、仮説は高い確率で棄却される。

4．分散分析表を計算するプログラム

NB. Appendix Analysis-of-variance calculations by Smillie

```
NB. Revised by J.Takeuchi 2004/10/22
T=: 3 : 0
:
+/^:(+/-.x.)(/:x.)|:y.
)
tt=: ,@{@(]@#&(<0 1))
S=: (+/@((*:@,)@T)) % (*/@(-.@[ # $@]))
allS=: (>@tt@#@$) S"1 _ ]
stt=: <"1@|."1@(/: +/"1)@(>@tt)
alphabet=: 'ABCDEF'
tag=: ]#({.&alphabet)@#@]
numtag=: (({.&alphabet)@(#@$@])) e. [
alltags=: (tag &. >)@(1&}.)@stt
expand=: /:@\:@[{#@[{.]
ps=: <"1@expand"1 >@stt@(+/)
ss=: | @ (-/) @ (>@ps@([numtag]) (+/"1@[ +//. S"1 _) ])
df=: ([:*/<:)@(numtag # $@])
term=: ss (] , [ , %) df
allterms=: (>@[) term"1 _ ]
   AOV=: 3 : 0
s0=: (alltags #$y.) AOV y.
:
Tyt=:,:'Source   d.f.       S.S.     mean sq.       F0   '
AOVtable=.x. allterms y.
Labels=.8{."1 >x.
dfTotal=.<:*/$y.
ssTotal=.(+/*:,y.) - '''' ss y.
dfError=.dfTotal - +/0{"1 AOVtable
if. dfError>0 do.
ssError=.ssTotal - +/1{"1 AOVtable
AOVtable=.AOVtable,ssError(],[,%)dfError
Labels=.Labels,'Error'
end.
AOVtable=.AOVtable,.({:"1 AOVtable)%ssError%dfError
r=.Labels,"1 (5 12.5 12.5 12.5)":AOVtable
r=.(12#' ')(<_1;12{.i:12)}r
AOVtable=.AOVtable,TotalRow=.dfTotal,ssTotal
r=.(r,'-'),'Total   ',5 12.5":TotalRow
'-',Tyt,'-',r,'-'
)
```

5．参考文献

[1] Smillie,K.(1993)　Some Notes on Introducing J with Statistical Examples Technical Note of Dep. of Computing Science Univ. of Alberta Edomonton,Alberta T6G 2H1

[2] 竹内寿一郎 (1995) : J による統計解析 (平均・分散と確率分布の計算法について)、JAPLA シンポジウム ’９５、統計数理研究所